PIĘKNO OBIEKTÓW MATEMATYCZNYCH

Natknąwszy się na „raj Cantora" – ów świat pełen egzotycznych obiektów − chciałbym poświęcić nieco uwagi pięknu obiektów matematycznych. (W odniesieniu do niektórych elementów matematyki wolę używać terminu „pojęcie matematyczne", w odniesieniu do innych „obiekt matematyczny". Sądzę, że u źródeł tych preferencji leżą pewne intuicje zbliżone do tych, które pozwalają mówić w metamatematyce o teorii matematycznej i o jej modelu bądź modelach. Poważna próba zastosowania tego rozróżnienia wymagałaby podjęcia problemów daleko wykraczających poza obszar estetyki matematyki. Muszę się więc ograniczyć do intuicji).

Zacznijmy od uwagi wykraczającej poza estetykę matematyki – uwagi należącej do najbardziej tradycyjnego obszaru estetyki, czyli do sztuki. Jak sądzę, jedną z jakości estetycznie doniosłych w sztuce (zwłaszcza współczesnej, a szczególnie w malarstwie) jest egzotyka. Zamiast przeprowadzać ogólne rozważania[19], odwołam się do konkretnego przykładu. W malarstwie dwudziestego wieku egzotyczny świat wykreował Salwador Dali. Zapewne dokonanie takie można przypisać i innym artystom, lecz to on uchodzi – moim zdaniem niebezpodstawnie – za jednego z największych malarzy dwudziestowiecznych. Dlaczego? Otóż, po pierwsze, niezależnie od tego, co sądzimy o treści jego obrazów, nie sposób odmówić mu rzemieślniczej sprawności – technicznego mistrzostwa. Po drugie, egzotyka jego malarstwa nie jest „nachalna": wystarczy kilka niewielkich modyfikacji znanego nam,

„naturalnego" świata (ukazanie powyginanych zegarów czy płonącej żyrafy), by uzyskać świat „egzotyczny". Po trzecie, przedstawienie owego „egzotycznego" świata nie jest (wyłącznie) celem samym w sobie, lecz sposobem powiedzenia czegoś być może istotnego także o „naszym" świecie.

Wróćmy do matematyki. Pod koniec dziewiętnastego wieku zaczęły się w niej pojawiać obiekty, które zasługują – jak sądzę – na miano „egzotycznych". Wskażę na dwa z nich. Pierwszy to w istocie nie jeden obiekt, ale (nieskończony) zbiór obiektów. Wszystkie jego elementy mają wszakże jedną wspólną fundamentalną cechę, która czyni je obiektami egzotycznymi (i z punktu widzenia tradycyjnej matematyki, i z punktu widzenia intuicji). Jest to zbiór funkcji ciągłych (określonych na zbiorze liczb rzeczywistych), które nie mają pochodnej w żadnym punkcie. Nie chcąc posługiwać się definicjami formalnymi, odwołam się do intuicji geometrycznych: Funkcja ciągła to funkcja, której wykres nie ma „luk" („skoków") i można – jak by się wydawało – narysować go jednym (ciągłym właśnie) ruchem. Funkcja ciągła (i tylko ciągła) ma w pewnym punkcie pochodną, jeśli jej wykres ma w tym punkcie styczną (prostą leżącą „bardzo blisko" krzywej w pewnym otoczeniu danego punktu). Nietrudno podać przykłady funkcji ciągłych niemających w pewnym punkcie pochodnej (stycznej). Najprostszym i najbardziej intuicyjnym przykładem jest funkcja „wartość bezwzględna" ($y = |x|$)[20]. Nietrudno zauważyć, że funkcja ta nie ma pochodnej (stycznej) w punkcie zero[21]. Wychodząc od tego przykładu, łatwo narysować funkcję, która miałaby dowolną (lecz skończoną) liczbę takich punktów (zwanych punktami nieróżniczkowalności). Nieco tylko trudniejsze – choć w dalszym ciągu raczej zgodne z intuicją – byłoby skonstruowanie funkcji o nieskończonej liczbie takich punktów (jak „nieskończona piła"). Zaskakującym odkryciem wielkiego niemieckiego matematyka Karla Weierstrassa (warto dodać, że pod kierunkiem jednego z jego uczniów, Lea Koenigsbergera, doktorat z matematyki napisał Edmund Husserl, który sam również należał do uczniów Weierstrassa) była funkcja ciągła, niemająca pochodnej (stycznej) w żadnym (sic!) punkcie. Interesującą – zwłaszcza dla filozofów – tego konsekwencją wydaje się fakt, że jest to funkcja ciągła dobrze (precyzyjnie, jednoznacznie) zdefiniowana, lecz graficznie niereprezentowalna, czyli – inaczej mówiąc – nie posiada ona wykresu. Dodajmy, że ma ona względnie prostą (choć bynajmniej nietrywialną) konstrukcję[22]. Chociaż funkcja ta jest niewątpliwie egzotycznym obiektem matematycznym, jej piękno nie ogranicza się do egzotyki (i konstrukcji). Związane

[20] Przypomnijmy: $|x| = x$ dla x nieujemnych i $|x| = -x$ dla x ujemnych. Wykres tej funkcji składa się z dwóch półprostych stykających się w punkcie $x=0$, w którym tworzą one „ostrze".

[21] Jeżeli funkcja ma w danym punkcie styczną, to z definicji ma ona styczną lewostronną i prawostronną i są one sobie równe. Tymczasem omawiana funkcja wprawdzie ma w punkcie zero obie styczne (lewo- i prawostronną), ale są one różne, a więc styczna sensu stricto nie istnieje.

[22] Jej omówienie zajęłoby niestety zbyt wiele miejsca.

jest ono również – a może przede wszystkim – z rolą, jaką funkcja owa odgrywa w pojmowaniu „świata" funkcji. Można by powiedzieć, że pozwala ona wysubtelnić nasze rozumienie jednego z najważniejszych pojęć matematyki (a także fizyki czy filozofii), jakim jest pojęcie ciągłości. Jeśli dodamy, że – jak się później okazało – funkcji tego rodzaju jest „bardzo dużo" (w dającym się precyzyjnie określić sensie: jest ich więcej niż funkcji „porządnych", czyli zgodnych z naszą intuicją), to dostrzeżemy doniosłość odkrycia Weierstrassa.

Chciałbym również wspomnieć o ciekawym obiekcie, jakim jest tak zwana krzywa Peana. Ogólna definicja krzywej – podana przez Camille'a Jordana – określa ją jako ciągły obraz odcinka [0,1]. Okazuje się, że istnieje krzywa (odkryta przez Giuseppego Peana), która wypełnia dokładnie kwadrat (jednostkowy). Uznanie, że obiekt dwuwymiarowy, kwadrat, to krzywa, jest niezgodne z intuicją, definicja Jordana wydaje się natomiast intuicyjna. Znajomość krzywej Peana pomaga więc wysubtelnić naszą intuicję geometryczną.

Przypomnijmy też ciekawy (i dość szeroko znany poza obszarem matematyki) obiekt, jakim jest tak zwana wstęga Möbiusa, którą scharakteryzować można jako powierzchnię jednostronną, czyli mającą tylko jedną stronę. Oprócz wielu właściwości, których opis wymagałby wprowadzenia aparatu formalnego, obiekt ten posiada interesujące cechy, które można scharakteryzować w sposób intuicyjny. Przykładowo: rozcięcie wstęgi wzdłuż krzywej dzielącej jej powierzchnię na dwie części powoduje nie – jak można byłoby się spodziewać – jej rozpad na dwa „kawałki", lecz jej wydłużenie i przekształcenie w powierzchnię dwustronną (co można sprawdzić empirycznie – za pomocą nożyczek!). Nieco podobny do wstęgi Möbiusa obiekt stanowi tak zwana butelka Kleina. Jej krótka charakterystyka nie jest jednak możliwa, ograniczę się więc do tej krótkiej wzmianki mającej zasugerować, że wstęga Möbiusa to tylko jeden z wielu „egzotycznych" obiektów geometrycznych (prawdopodobnie najprostszy).

Fragment poświęcony pięknu obiektów matematycznych pragnę zakończyć kilkoma uwagami na temat fraktali. Jednym z powodów, które skłoniły mnie do tego, są słowa Jacka Kuderowicza, autora (ze względu na cytowaną tu jego wypowiedź warto może dodać, że był on profesorem na Wydziale Elektroniki Politechniki Warszawskiej) znanego polskiego podręcznika poświęconego teorii tych obiektów: „Często stawiane jest pytanie, do czego służą fraktale i dlaczego tak dużo ludzi na świecie zajmuje się tym tematem. Przypuszczalnie najważniejszym [sic! – W.C.] powodem jest to, że niektóre fraktale są bardzo ładne i sprawiają wiele radości tym, którzy je odkrywają, i tym, którzy oglądają"[23]. (Nieco dalej czytamy jednak: „Podstawowe proble-

[23] J. K u d r e w i c z, *Fraktale i chaos*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne Warszawa 1993, s. 19.

my geometrycznej teorii równań różniczkowych opisujących zjawiska przyrodnicze nie dadzą się rozwiązać bez fraktali”[24]). Poczynię najpierw dwie uwagi historyczne.

Po pierwsze, głównym twórcą teorii fraktali był Benoît Mandelbrot. Czy czuł się Polakiem – nie wiem (dostępne mi źródła nic na ten temat nie mówią), ale faktem jest, że urodził się w Warszawie i tu spędził pierwszych dwanaście lat swego życia. Po drugie, jeden z pierwszych przykładów fraktali, uznawany dzisiaj za klasyczny, stanowi – odkryty w roku 1915 (a więc ponad pół wieku przed powstaniem teorii fraktali) – dywan Sierpińskiego (nazwany tak na cześć jego odkrywcy, Wacława Sierpińskiego – jednego z najwybitniejszych polskich matematyków). Po trzecie, fraktale są szczególnie interesującym obiektem z punktu widzenia problematyki podjętej w niniejszym tekście: można albo, abstrahując od ich matematycznej natury, traktować je jako sui generis dzieła sztuki, albo skupić się na ich matematycznej istocie. Można jednak również − i takie stanowisko jest mi najbliższe – traktować oba podejścia jako komplementarne, uznając ową komplementarność za dodatkowy „składnik” estetycznej wartości fraktali.

Najbardziej bodaj znanym fraktalem jest tak zwany zbiór Mandelbrota[25]. Jego wizualne reprezentacje są – moim zdaniem – piękne w tym dokładnie sensie, w jakim piękne są na przykład obrazy Pieta Mondriana czy Paula Klee. Powiedziałbym nawet (z pełną świadomością głęboko subiektywnego charakteru tej deklaracji), że są one piękniejsze od wielu dzieł wybitnych artystów (zwłaszcza tych zaliczanych do abstrakcjonistów), a fakt, że reprezentacje te powstają za pomocą komputera, nie zaś pędzla, jest mało istotny. Gdyby nawet o fraktalu nie można było nic więcej powiedzieć, to i tak jego odkrycie byłoby ważnym wydarzeniem w historii kultury. A przecież jest to obiekt niezwykle piękny również z czysto matematycznego punktu widzenia. Oto, co mówi o nim Roger Penrose: „Co to za dziwny, zmienny i cudownie skomplikowany świat, który niespodziewanie odkryliśmy? […] Jest to obiekt ze sfery matematyki czystej […] Bez wątpienia jest on niezwykle skomplikowany, a mimo to można go wygenerować za pomocą bardzo prostej reguły!”[26] Co jeszcze można byłoby tu o nim powiedzieć? – Przede wszystkim to, że w jego definicji podstawową rolę odgrywają liczby zespolone (które pojawiły się już

[24] Tamże.

[25] Na poświęconej mu stronie anglojęzycznej Wikipedii (zob. hasło „Mandelbrot set”, Wikipedia, https://en.wikipedia.org/wiki/Mandelbrot_set) poza bardzo dobrym i szczegółowym omówieniem różnorodnych własności zbioru Mandelbrota można znaleźć wiele (znaczenie więcej niż na stronie polskiej) ilustracji pokazujących różne fragmenty tego zbioru, który – z uwagi na swą matematyczną strukturę – nie jest w całości reprezentowalny wizualnie.

[26] P e n r o s e, *Nowy umysł cesarza*, s. 99. Uwagi matematyczne na temat konstrukcji zbioru Mandelbrota por. tamże, s. 113-116.

na początku tego tekstu: $i^2 = -1$). A także to, że struktura zbioru Mandelbrota jest piękną ilustracją pojęcia nieskończoności (im bardziej zagłębiamy się w ten zbiór – a możemy wchodzić weń coraz głębiej i głębiej – tym bardziej skomplikowaną rzeczywistość napotykamy). Nie od rzeczy będzie też zauważyć, że samo odkrycie zbioru Mandelbrota związane jest z wykorzystaniem komputerów, które odegrały też ważną rolę w ich badaniu. Zakończmy te uwagi, podkreślając (między innymi za Kudrewiczem), że fraktale – piękne i wizualnie, i matematycznie – są też ważnym narzędziem badania przyrody. Myślę, że nic to nie ujmuje ich pięknu: przeciwnie – piękno to wzbogaca.